Математическая физика, анализ, геометрия
2000, т. 7, № 4, с. 387–414

Функции плотности

А.Ф. Гришин

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
Пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина*
E-mail:grishin@univer.kharkov.ua

Т.И. Малютина

*Украинская академия банковского дела
Ул. Петропавловская, 56, г. Сумы, 40030, Украина*
E-mail:malyutina@abank.sumy.ua

Статья поступила в редакцию 16 августа 1999 года
Представлена И.В. Островским

Изучаются свойства ρ-полуаддитивных функций, $N(\alpha+\beta) \le N(\alpha) + (1+\alpha)^\rho N\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right)$. Теория ρ-полуаддитивных функций параллельна хорошо разработанной теории полуаддитивных функций. Классу ρ-полуаддитивных функций принадлежат функции плотности $N(\alpha) = \limsup r^{-\rho}$ $(f(r+\alpha r) - f(r))$ $(r \to \infty)$. Один из результатов данной работы — распространение теоремы Полиа (1929) о существовании минимальной и максимальной плотностей на более широкий класс функций. Авторов также интересуют вопросы равномерности в представленном выше предельном соотношении.

1. Введение

Как известно, например, из [1], функция $\rho(r)$ называется уточненным порядком, если выполняются условия

$$\lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho, \quad \lim_{r\to\infty} r \ln r \rho'(r) = 0\,.$$

В нашей статье ρ может быть произвольным вещественным числом. При изучении роста целых функций обычно ограничиваются условием $\rho \ge 0$. Мы

Исследования первого автора частично поддерживаются INTAS 96-0858.

будем обозначать $V(r) = r^{\rho(r)}$. Как следует из результатов Валирона, для любой функции $f \geq 0$ конечного порядка существует уточненный порядок $\rho(r)$ такой, что

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{f(r)}{V(r)} := \sigma \in (0,\infty)\,. \tag{1}$$

Доказательство более сильного результата приведено в [1]; новые результаты, связанные с уточненным порядком, изложены в [2].Именно соотношение (1) имеется ввиду, когда говорят, что шкала функций вида $V(r)$ достаточна для теории роста функций конечного порядка. Величину σ называют типом функции относительно уточненного порядка $\rho(r)$ (относительно функции $V(r)$). Пусть $L(r) = r^{-\rho}V(r)$. Известно (см. [1]), что для любого $t \in (0,\infty)$ выполняется равенство

$$\lim_{r\to\infty}\frac{L(rt)}{L(r)} = 1\,. \tag{2}$$

Если для некоторой функции L выполняется равенство (2), то функция L называется медленно меняющейся функцией в смысле Караматы. Теории медленно меняющихся функций посвящена книга [3]. Отметим, что в этой книге не упоминается уточненный порядок, хотя исследования Валирона по уточненному порядку предшествовали работам Караматы.

Зафиксируем некоторый уточненный порядок. Пусть $f(r)$ — произвольная функция на луче $[0,\infty)$. Тогда для нее по формуле (1) можно определить тип σ. Конечно, для произвольной функции f можно только утверждать, что $\sigma \in [-\infty,\infty]$. Тип функции f — важная характеристика роста этой функции. Однако значительно большую информацию о поведении f дают верхняя функция плотности $N(\alpha)$ и нижняя функция плотности $\underline{N}(\alpha)$, которые вычисляются по формулам

$$N(\alpha) = \varlimsup_{r\to\infty}\frac{f(r+\alpha r)-f(r)}{V(r)}, \quad \alpha \geq 0\,, \tag{3}$$

$$\underline{N}(\alpha) = \varliminf_{r\to\infty}\frac{f(r+\alpha r)-f(r)}{V(r)}, \quad \alpha \geq 0\,. \tag{4}$$

Из свойств верхнего и нижнего пределов и равенства (2) следуют неравенства

$$N(\alpha+\beta) \leq N(\alpha) + (1+\alpha)^{\rho} N\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right)\,, \tag{5}$$

$$N(\alpha+\beta) \geq N(\alpha) + (1+\alpha)^{\rho} \underline{N}\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right)\,, \tag{6}$$

$$\underline{N}(\alpha+\beta) \geq \underline{N}(\alpha) + (1+\alpha)^{\rho} \underline{N}\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right)\,, \tag{7}$$

$N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ называются функциями плотности меры μ. Обычно предполагается, что выполняется неравенство $|f(r)| \leq MV(r)$. В этом случае функции $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ ограничены на любом сегменте $[a,b] \subset [0,\infty)$. По различным причинам иногда приходится отказываться от априорной оценки $|f(r)| \leq MV(r)$. В этом случае необходимо считать, что функции $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ принимают значения из расширенной вещественной прямой $[-\infty,\infty]$. При действиях с величинами из расширенной вещественной прямой в статье предполагается, что соотношения $x = \infty - \infty$, $x \leq \infty - \infty$, $x \geq \infty - \infty$, справедливы для любого $x \in [-\infty,\infty]$. В статье под ρ-полуаддитивной функцией понимается функция, определенная на полуоси $(0,\infty)$ со значениями из расширенной вещественной прямой $[-\infty,\infty]$ и удовлетворяющая одному из неравенств — (5) или (7). Неравенство (5) по своей структуре напоминает неравенство

$$\varphi(\alpha+\beta) \leq \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)\,, \tag{9}$$

а при $\rho = 0$ прямо сводится к этому неравенству заменой переменной $\alpha = e^t - 1$. Функции, удовлетворяющие неравенству (9), называются полуаддитивными. Полуаддитивные функции часто встречаются в различных вопросах математики. Они активно изучались, и их теория изложена в [4], где приведены многочисленные ссылки. Наши результаты для ρ-полуаддитивных функций сравнимы с соответствующими результатами для полуаддитивных функций, и некоторые наши рассуждения повторяют соотвествующие рассуждения из [4]. В этой книге рассматриваются измеримые полуаддитивные функции. Это ограничение естественно и не столь обременительно, если полуаддитивные функции рассматривать как первичные объекты, исходя из которых вести дальнейшие построения. Однако в рассматриваемом нами случае требование измеримости $N(\alpha)$ не столь безобидно. Дело в том, что мы рассматриваем функцию $N(\alpha)$ как функцию плотности, а из измеримости функции f (в данном случае — это безобидное требование) не следует, что ее функция плотности $N(\alpha)$ будет измеримой.

Верхняя функция плотности $N(\alpha)$ удовлетворяет условиям $N(0) = 0$ и (5). Но далеко не всякая функция $N(\alpha)$, $\alpha \geq 0$, удовлетворяющая этим условиям, будет функцией плотности. Дело в том, что равенством (3) функцию $N(\alpha)$ можно определить при $\alpha > -1$, причем неравенство (5) будет выполняться и при таких α. Таким образом, всякая функция плотности $N(\alpha)$ продолжается как ρ-полуаддитивная на полуось $(-1,\infty)$. Нетрудно подсчитать, что функция $N(\alpha)$ при отрицательных α определяется следующим образом:

$$N(\alpha) = -(1+\alpha)^{\rho}\underline{N}\left(-\frac{\alpha}{1+\alpha}\right), \quad \alpha \in (-1,0)\,. \tag{10}$$

что функция $N(\alpha)$ при отрицательных α определяется следующим образом:

$$N(\alpha) = -(1+\alpha)^{\rho}\underline{N}\left(-\frac{\alpha}{1+\alpha}\right), \quad \alpha \in (-1,0)\,. \tag{10}$$

Аналогично,

$$\underline{N}(\alpha) = -(1+\alpha)^{\rho}N\left(-\frac{\alpha}{1+\alpha}\right), \quad \alpha \in (-1,0)\,. \tag{11}$$

Заметим еще, что $\underline{N}(\alpha) \le N(\alpha)$. Вопросы, связанные с продолжением полуаддитивных функций, обсуждаются в [4] (см., например, теорему 7.6.4).

Изучение свойств функций плотности — одна из тем нашей работы. Близкие понятия, функции концентрации, изучаются в [5]. Кроме этого, нас интересуют вопросы равномерности. Пусть $\psi(\alpha)$ — непрерывная функция на оси $(-\infty,\infty)$, $\psi(0)=0$, и пусть выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{f(r+\alpha r)-f(r)}{V(r)} \le \psi(\alpha)\,.$$

Используем обозначение $u^{+}(x) = \max(u(x),0)$. Нас интересует, при каких условиях на функцию f функция

$$\varepsilon(r,\alpha) = \left(\frac{f(r+\alpha r)-f(r)}{V(r)} - \psi(\alpha)\right)^{+}$$

равномерно относительно $\alpha \in [a,b]$ стремится к нулю при $r\to\infty$. В теореме 2 показывается, что слабое условие измеримости f обеспечивает равномерное стремление к нулю функции ε. Оригинальной в этом направлении является работа [6], где впервые (в иной чем у нас ситуации) найдены методы получения равномерных оценок из условий измеримости. Более подробные ссылки можно найти в книге [3] и убедиться в том, что вопросы равномерности играют важную роль в теории медленно растущих функций. Теорема 2 по форме и методам доказательства напоминает теорему 2.12 из [3].

Наше изложение больше ориентировано на применения к теории роста субгармонических функций. Изложение теории субаддитивных функций в [4] ориентировано на применение в различных вопросах анализа, но более всего — в теории полугрупп операторов. Только в случае $\rho=0$ ρ-полуаддитивные функции с точностью до замены переменной $\alpha = e^{t}-1$ совпадают с полуаддитивными. Специалисты по теории роста целых и субгармонических функций знают, что случай $\rho=0$ всегда требует отдельного исследования. Исключительность случая $\rho=0$ можно наблюдать и в нашей работе.

2. Теорема о равномерности

Этот раздел начнем с простого критерия непрерывности функций $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$.

Теорема 1. *Пусть функции $N(\alpha)$, $\underline{N}(\alpha)$, $\alpha \geq 0$, со значениями из расширенной вещественной прямой, удовлетворяют неравенствам (5)–(8) и равенствам $N(0) = \underline{N}(0) = 0$. Для того чтобы обе функции были конечными непрерывными функциями на полуоси $[0, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства $\lim\limits_{\alpha \to +0} N(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to +0} \underline{N}(\alpha) = 0$.*

Доказательство простое, и мы его опускаем. Далее переходим к основному результату этого раздела.

Теорема 2. *Пусть $f(r)$ — конечная измеримая функция на полуоси $(0, \infty)$, $\psi(\alpha)$ — непрерывная функция на оси $(-\infty, \infty)$, $\psi(0) = 0$. Если неравенство*

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{f(r + \alpha r) - f(r)}{V(r)} \leq \psi(\alpha) \tag{12}$$

выполняется на полуоси $[0, \infty)$, то оно выполняется равномерно на любом сегменте $[a, b] \subset (0, \infty)$. Если же это неравенство выполняется на полуоси $[-\eta, \infty)$, где η — некоторое строго положительное число, то оно выполняется равномерно на любом сегменте $[0, b]$.

З а м е ч а н и е 1. Равномерное выполнение неравенства (12) на сегменте означает, что функция $\varepsilon(r, \alpha)$, определенная в разделе 1, равномерно по α на этом сегменте стремится к нулю при $r \to \infty$.

З а м е ч а н и е 2. Пусть $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ — функции плотности измеримой функции f. Для того чтобы обе эти функции были непрерывными, необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\lim_{\substack{r \to \infty \\ \alpha \to +0}} \frac{f(r + \alpha r) - f(r)}{V(r)} = 0\,. \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о замечания 2. Если выполняется равенство (13), то $\lim\limits_{\alpha \to +0} N(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to +0} \underline{N}(\alpha) = 0$. Теперь из теоремы 1 следует непрерывность функций$N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$. Обратно, пусть функции $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ непрерывны. Используя равенства (10) и (11), можно считать, что эти функции непрерывны на полуоси $(-1, \infty)$. Теперь из теоремы 2, примененной к функциям f и $-f$, следует существование функции $\varepsilon(r) \to 0$ при $r \to \infty$ такой, что будут справедливы неравенства

$$(\underline{N}(\alpha) - \varepsilon(r))V(r) \leq f(r + \alpha r) - f(r) \leq (N(\alpha) + \varepsilon(r))V(r), \quad \alpha \in [0, 1]\,.$$

Из этих неравенств вытекает равенство (13).

Доказательство теоремы 2. Обозначим $r = e^x$, $1 + \alpha = e^\tau$, $\varphi(x) = f(e^x)$, $\Phi(x) = V(e^x)$, $a_1 = \ln(1+a)$, $b_1 = \ln(1+b)$, $\psi_1(\tau) = \psi(e^\tau - 1)$. В новых обозначениях неравенство (12) будет иметь вид

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\varphi(x+\tau) - \varphi(x)}{\Phi(x)} \leq \psi_1(\tau)\,. \tag{14}$$

Нам нужно доказать, что это соотношение выполняется равномерно на сегменте $[a_1, b_1]$. Если это не так, то существуют строго положительное число ε, последовательности $x_n \to \infty$, $\tau_n \in [a_1, b_1]$ такие, что

$$\varphi(x_n + \tau_n) - \varphi(x_n) \geq (\psi_1(\tau_n) + \varepsilon)\Phi(x_n)\,. \tag{15}$$

Пусть ε_1, δ_1, δ — произвольные строго положительные числа. Определим множество

$$U_n = \Big\{\alpha \in [0,\delta] : \varphi(x_m + \alpha) - \varphi(x_m) < (\psi_1(\alpha) + \varepsilon_1)\Phi(x_m), \quad \forall m \geq n\Big\}\,.$$

Имеем $U_{n+1} \supset U_n$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n = [0,\delta]$. Из измеримости функции φ следует измеримость множеств U_n. Далее определяем множество $V_n = \Big\{\beta \in [a_1 - \delta, b_1] : \varphi(x_m+\tau_m) - \varphi(x_m+\tau_m-\beta) < (\psi_1(\beta)+\varepsilon_1)\Phi(x_m+\tau_m-\beta), \forall m \geq n\Big\}$. Множества V_n измеримы, $V_n \subset V_{n+1}$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n = [a_1 - \delta, b_1]$. Из свойств непрерывности меры следует, что для всех достаточно больших p будут справедливы соотношения

$$\operatorname{mes} U_p > \delta - \delta_1, \quad \operatorname{mes} V_p > b_1 - a_1 + \delta - \delta_1\,.$$

Пусть $V_p' = \tau_p - V_p$, и пусть $\delta_1 < \frac{1}{2}\delta$. Легко проверяются соотношения

$$U_p \subset [0,\delta] \subset [\tau_p - b_1, \tau_p - a_1 + \delta], \quad V_p' \subset [\tau_p - b_1, \tau_p - a_1 + \delta]\,,$$

$$\operatorname{mes} U_p > \delta - \delta_1, \quad \operatorname{mes} V_p' > b_1 - a_1 + \delta - \delta_1\,.$$

Из этого следует, что $U_p \bigcap V_p' \neq \emptyset$. Пусть $\alpha \in U_p \bigcap V_p'$. Тогда $\alpha \in [0,\delta]$, $\alpha = \tau_p - \beta$, $\beta \in V_p$, $\varphi(x_p+\alpha) - \varphi(x_p) < (\psi_1(\alpha)+\varepsilon_1)\Phi(x_p)$, $\varphi(x_p+\tau_p) - \varphi(x_p+\alpha) < (\psi_1(\tau_p - \alpha) + \varepsilon_1)\Phi(x_p + \alpha)$.

Складывая два последних неравенства, получим

$$\varphi(x_p + \tau_p) - \varphi(x_p) < \psi_1(\tau_p)\Phi(x_p) + (\psi_1(\alpha) + \varepsilon_1)\Phi(x_p)$$

$$+\varepsilon_1 \frac{\Phi(x_p+\alpha)}{\Phi(x_p)}\Phi(x_p) + \psi_1(\tau_p - \alpha)\left[\frac{\Phi(x_p+\alpha)}{\Phi(x_p)} - 1\right]\Phi(x_p)$$

$$+[\psi_1(\tau_p-\alpha)-\psi_1(\tau_p)]\Phi(x_p)\,.$$

Напомним, что $\alpha \in [0,\delta]$. При достаточно малых ε_1 и δ и достаточно больших p это неравенство противоречит неравенству (15). Тем самым доказано, что соотношение (14) выполняется равномерно на сегменте $[a_1, b_1]$. Если неравенство (12) выполняется на полуоси $[-\eta,\infty)$, то наши рассуждения проходят и в случае $a=0$. Тем самым теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 3. Если неравенство (12) выполняется только на полуоси $[0,\infty)$, то в качестве a в условии теоремы нельзя брать нуль. Это видно из следующего примера. Пусть $V(r)$ — строго возрастающая функция. Функция $f(r)$ строится следующим образом. Выбираем $R_1=10$ и определяем $f(r)=2V(r)$ при $r\in[0,R_1]$. Далее строим функцию f индуктивным способом. Пусть мы уже определили $f(r)$ на сегменте $[0,R_{3n+1}]$, причем $f(R_{3n+1})=2V(R_{3n+1})$. Выбираем $R_{3n+2}=(1+\frac{1}{2^{n+1}})R_{3n+1}$, $R_{3n+3}=(1+2^{n+1})R_{3n+1}$, $f(r)=V(R_{3n+1})$ при $r\in(R_{3n+1},R_{3n+3}]\setminus\{R_{3n+2}\}$, $f(R_{3n+2})=2V(R_{3n+1})$. Далее на участке $(R_{3n+3},R_{3n+4}]$ полагаем $f(r)=f(R_{3n+3})+5(V(R)-V(R_{3n+3}))$ и выбираем R_{3n+4} из условия $f(R_{3n+4})=2V(R_{3n+4})$.

3. Свойства ρ-полуаддитивных функций

Вначале сформулируем один предварительный результат. Представленная ниже теорема, которая принадлежит Штейнгаузу [7, теорема 7], — один из способов использовать условия измеримости функции в нашей работе.

Теорема 3. *Арифметическая сумма $A+B$ измеримых множеств положительной меры на вещественной оси содержит в себе некоторый сегмент $[\alpha,\beta]$, $\alpha<\beta$.*

Простейшие из ρ-полуаддитивных функций — это те, для которых в неравенствах (5) или (7) стоит знак равенства. Они называются ρ-аддитивными функциями. К этому классу принадлежат функции плотности регулярно растущих функций f, т.е. таких функций, для которых существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{f(r+\alpha r)-f(r)}{V(r)}\,.$$

Впоследствии увидим, что нерегулярно растущие функции также могут иметь ρ-аддитивные функции плотности. В следующей теореме исследуется класс ρ-аддитивных функций.

Теорема 4. *Пусть функция $N(\alpha)$ на полуоси $(0,\infty)$, принимающая значения из расширенной вещественной прямой $[-\infty,\infty]$, удовлетворяет равенству*

$$N(\alpha+\beta)=N(\alpha)+(1+\alpha)^\rho N\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right),\quad \rho\in(-\infty,\infty)\,. \tag{16}$$

Пусть $\rho \neq 0$ и функция $N(\alpha)$ конечна на множестве положительной меры. Тогда существует постоянная N такая, что

$$N(\alpha) = N\frac{(1+\alpha)^\rho - 1}{\rho}.$$

Пусть $\rho = 0$ и функция $N(\alpha)$ удовлетворяет хотя бы одному из двух условий:

1) $N(\alpha)$ — измеримая функция, которая конечна на множестве положительной меры,

2) $N(\alpha)$ — ограниченная функция на некотором множестве положительной меры.

Тогда

$$N(\alpha) = N\ln(1+\alpha).$$

З а м е ч а н и е. Все необходимые рассуждения для доказательства теоремы 4 можно извлечь из [3, лемма 1.13 и теорема 2.9]. Однако, для полноты изложения мы приведем доказательство теоремы 4.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4. Обозначим $\varphi(t) = N(e^t - 1)$. Для функции φ получаем уравнение

$$\varphi(u+v) = \varphi(u) + e^{\rho u}\varphi(v), \quad u, v > 0. \tag{17}$$

В частности,

$$\varphi(2u) = (1 + e^{\rho u})\varphi(u). \tag{18}$$

Пусть

$$A = \{x > 0 : |\varphi(x)| < \infty\}.$$

Из условия теоремы следует, что множество A содержит в себе множество положительной меры. Из равенства (17) следует, что $A + A \subset A$. Из теоремы 3 следует, что $\mathring{A} \neq \varnothing$ ($\mathring{A}$ — внутренность A). Из равенства (18) получаем, что $\frac{1}{2}A \subset A$. Поэтому $\inf \mathring{A} = 0$. Если теперь $\mathring{A} \neq (a, \infty)$, то существует интервал $(\alpha, \beta) \subset \mathring{A}$ такой, что $\beta \notin \mathring{A}$. Пусть теперь $\gamma \in A$, $\gamma \in (0, \beta - \alpha)$. Так как $\gamma + A \subset A$, то интервал $(\alpha + \gamma, \beta + \gamma) \subset A$, но тогда $\beta \in \mathring{A}$. Получаем противоречие. Следовательно, $\mathring{A} = (a, \infty)$. Из равенства $\inf \mathring{A} = 0$ следует, что $a = 0$. Таким образом, функция $\varphi(t)$ конечна на всей полуоси $(0, \infty)$. Пусть теперь $\rho \neq 0$. Тогда, меняя в равенстве (17) местами u и v, получим

$$\varphi(u+v) = \varphi(v) + e^{\rho v}\varphi(u), \quad \frac{\varphi(u)}{e^{\rho u} - 1} = \frac{\varphi(v)}{e^{\rho v} - 1} = \frac{N}{\rho},$$

$$\varphi(u) = N\frac{e^{\rho u} - 1}{\rho}, \quad N(\alpha) = N\frac{(1+\alpha)^\rho - 1}{\rho}.$$

Пусть теперь $\rho = 0$. Имеем $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$, причем φ конечная на полуоси функция. Если φ — измеримая функция и $U_n = \{u \in [1,2] : |\varphi(u)| < n\}$, то U_n — возрастающая последовательность измеримых множеств, причем $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n = [1,2]$. Тогда для некоторого n $\operatorname{mes} U_n > 0$. Таким образом, из условия теоремы в случае $\rho = 0$ следует, что существует множество B положительной меры, на котором функция $|\varphi|$ ограничена, скажем, константой b. Тогда на множестве $B + B$ она ограничена константой $2b$. По теореме 3 множество $B + B$ содержит в себе сегмент $[\alpha, \beta] \subset (0, \infty)$. Пусть $\varphi(1) = N$. Тогда из равенства $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ следует, что для положительных рациональных u выполняется равенство $\varphi(u) = Nu$. Рассмотрим функцию $\varphi_1(u) = \varphi(u) - Nu$. Эта функция удовлетворяет уравнению $\varphi_1(u+v) = \varphi_1(u) + \varphi_1(v)$, $u, v > 0$, ограничена на сегменте $[\alpha, \beta]$ и равна нулю в положительных рациональных точках. Пусть теперь x — произвольное число на полуоси $(0, \infty)$. Всегда существует рациональное число r такое, что $x + r = y$, где $y \in [\alpha, \beta]$. Тогда, используя равенство $x + r = y$, если $r > 0$, равенство $x = y - r$, если $r < 0$, функциональное уравнение для φ_1 и то, что φ_1 обращается в нуль в положительных рациональных точках, получим $\varphi_1(x) = \varphi_1(y)$. Из этого следует, что функция φ_1 ограничена на всей полуоси $(0, \infty)$. Если теперь для некоторого $x_0 > 0$ $\varphi_1(x_0) \neq 0$, то равенство $\varphi_1(nx_0) = n\varphi_1(x_0)$ приводит к противоречию. Таким образом, $\varphi_1(u) = 0$, $\varphi(u) = Nu$, $N(\alpha) = N \ln(1+\alpha)$. Теорема 4 доказана.

Следующие две теоремы касаются свойств произвольных ρ-полуаддитивных функций.

Теорема 5. *Пусть $N(\alpha)$, $\alpha \in (0, \infty)$, является ρ-полуаддитивной функцией, которая удовлетворяет неравенству* (5). *Тогда либо* $\varliminf\limits_{\alpha \to +0} N(\alpha) = -\infty$, *либо* $\varliminf\limits_{\alpha \to +0} N(\alpha) \geq 0$.

З а м е ч а н и е. Такое же утверждение для полуаддитивных функций приведено в [4, теорема 7.4.3].

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 5. Обозначим $\lambda = \varliminf\limits_{\alpha \to +0} N(\alpha)$. Если $|\lambda| = \infty$, то и доказывать нечего. Поэтому можно считать, что $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Пусть τ_n, $\lim\limits_{n \to \infty} \tau_n = 0$, такая последовательность, что $\lim\limits_{n \to \infty} N(\tau_n) = \lambda$. Пусть ε — произвольное строго положительное число. Тогда для всех достаточно больших n выполняются неравенства

$$\lambda - \varepsilon < N(2\tau_n + \tau_n^2) \leq (1 + (1+\tau_n)^\rho) N(\tau_n) < 2\lambda + \varepsilon \,.$$

Отсюда следует $\lambda \leq 2\lambda$, $\lambda \geq 0$. Теорема доказана.

Для доказательства следующей теоремы предварительно докажем две леммы. В этих леммах $[x]$ означает целую часть x.

Лемма 1. *Пусть заданы сегмент* $[t_1, t_2] \subset (0, \infty)$ *и целое положительное число* p *такие, что* $\left[t_1, \frac{p+1}{p} t_1\right] \subset [t_1, t_2]$. *Тогда любое* $x \geq pt_1$ *представляется в виде* $x = pt + kt_1$, *где* $k = \left[\frac{x - pt_1}{t_1}\right]$, $t \in [t_1, t_2]$.

Доказательство очевидно.

Лемма 2. *Пусть заданы число* $s > 0$, *сегмент* $[\tau_1, \tau_2] \subset (0, \infty)$ *и целое число* A *такие, что* $A(\tau_2 - \tau_1) > 2s$. *Тогда любое число* $x \geq \left(\left[\frac{A\tau_1}{s}\right] + 1\right)^2 s$ *представляется в виде* $x = n\tau + ms$, *где* $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$, $n = A\left(\left[\frac{A\tau_1}{s}\right] + 1\right)$, $m = k\left(\left[\frac{A\tau_1}{s}\right] + 1\right)$, $k = \left[\frac{x - \left(\left[\frac{A\tau_1}{s}\right]+1\right)^2 s}{s\left(\left[\frac{A\tau_1}{s}\right]+1\right)}\right]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство $A(\tau_2 - \tau_1) > 2s$ гарантирует включение
$$\left[\left(\left[\frac{A\tau_1}{s}\right] + 1\right) s, \left(\left[\frac{A\tau_1}{s}\right] + 2\right) s\right] \subset [A\tau_1, A\tau_2]. \tag{19}$$
Теперь применение леммы 1 с параметрами $t_1 = \left(\left[\frac{A\tau_1}{s}\right] + 1\right) s$, $p = \left[\frac{A\tau_1}{s}\right] + 1$ и соотношение (19) доказывают лемму 2.

З а м е ч а н и е. Если взять $A = [x^{1/3}]$, то для представления $x = n(x)\tau + m(x)s$ будут справедливы соотношения $n(x) \sim \frac{\tau_1}{s} x^{2/3}$, $m(x) \sim \frac{x}{s}$. Варьируя величину A, можно добиться, чтобы выполнялось любое из соотношений
$$\lim_{x\to\infty} \frac{m(x)}{n(x)} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{n(x)}{m(x)} = 0$$
при выполнении условий $\lim\limits_{x\to\infty} n(x) = \lim\limits_{x\to\infty} m(x) = \infty$.

Далее формулируется основная теорема о свойствах ρ-полуаддитивных функций.

Теорема 6. *Пусть* $N(\alpha)$ — ρ*-полуаддитивная функция, которая удовлетворяет неравенству* (5) *при некотором* $\rho \in (-\infty, \infty)$.

1. *Если выполняется хотя бы одно из условий:*

а) *функция* $N(\alpha)$ *измерима и удовлетворяет неравенству* $N(\alpha) < \infty$ *на множестве положительной меры,* б) *функция $N(\alpha)$ ограничена сверху на множестве положительной меры,*

то существует предел

$$H = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1} = \inf_{\alpha>0} \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1}.$$

2. *Для любой точки $x > 0$ справедливы неравенства*

$$\frac{\rho}{(1+x)^\rho - 1} \varliminf_{\alpha\to x+0} N(\alpha) \le \varliminf_{\alpha\to+0} \frac{N(\alpha)}{\alpha},$$

$$\frac{\rho}{(1+x)^\rho - 1} \varliminf_{\alpha\to x-0} N(\alpha) \le \varliminf_{\alpha\to+0} \frac{N(\alpha)}{\alpha}.$$

3. *Если для каждого $\alpha > 0$ функция $N(\alpha)$ либо полунепрерывна снизу слева в точке α, либо полунепрерывна снизу справа в этой точке, то существует предел*

$$N = \lim_{\alpha\to+0} \frac{N(\alpha)}{\alpha} = \sup_{\alpha>0} \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1}.$$

Замечание 1. Как уже отмечалось во Введении, теория ρ-полуаддитивных функций параллельна хорошо разработанной теории полуаддитивных функций, причем для случая $\rho = 0$ функция $N(\alpha)$ с помощью замены $\alpha = e^t - 1$ превращается в полуаддитивную функцию. Аналогом утверждения 1 теоремы является теорема 7.6.1 из [4]. Аналогом утверждения 3 является теорема 7.11.1 из этой же книги. Как следствие теоремы 6 легко получается такая теорема.

Теорема 7. *Пусть $N(\alpha)$ — ρ-полуаддитивная функция, удовлетворяющая неравенству (5). Если выполняется хотя бы одно из условий*

1) $\varlimsup_{\alpha\to+0} N(\alpha) \le 0$,

2) $N(\alpha)$ — *монотонная функция,*

то существует предел

$$N := \lim_{\alpha\to+0} \frac{N(\alpha)}{\alpha} = \sup_{\alpha>0} \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1}.$$

Доказательство теоремы 7. Пусть $\varlimsup_{\alpha\to+0} N(\alpha) \le 0$. Тогда

$$N(x) \le N(x-h) + (1+x-h)^\rho N\left(\frac{h}{1+x-h}\right).$$

Из этого следует, что

$$N(x) \leq \underline{\lim}_{h\to+0} N(x-h) + (1+x)^{\rho}\, \overline{\lim}_{h\to+0} N\left(\frac{h}{1+x-h}\right) \leq \underline{\lim}_{h\to+0} N(x-h)\,.$$

Это означает, что функция $N(\alpha)$ полунепрерывна снизу слева. Также полунепрерывна снизу слева любая убывающая функция. А любая возрастающая функция является полунепрерывной снизу справа. Теперь применение утверждения 3 теоремы 6 дает теорему 7.

З а м е ч а н и е 2. Пусть a_n – последовательность положительных чисел, а $f(r) = \sum_{a_n \leq r} 1$ – считающая функция последовательности a_n. Пусть $N(\alpha)$, $\underline{N}(\alpha)$ – функции плотности функции $f(r)$ относительно уточненного порядка $\rho(r) \equiv 1$. Обе функции, $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$, возрастающие. Тогда по теореме 7, если ее применять к функциям $N(\alpha)$ и $-\underline{N}(\alpha)$, получим, что существуют пределы

$$N = \lim_{\alpha\to+0} \frac{N(\alpha)}{\alpha}, \quad \underline{N} = \lim_{\alpha\to+0} \frac{\underline{N}(\alpha)}{\alpha}\,.$$

Эти утверждения совпадают с теоремой Полиа [8] о существовании минимальной и максимальной плотностей. Правда, Полиа доказывал свою теорему при некотором дополнительном предположении о последовательности a_n. Затем А.А. Кондратюк [9] показал, что дополнительные предположения не нужны. Он также рассмотрел случай произвольного уточненного порядка. Таким образом, утверждение 3 теоремы 6 или теорему 7 можно рассматривать как распространение теоремы Полиа на более широкий класс функций.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 6. Обозначим $\varphi(t) = N(e^t - 1)$. Тогда неравенство (5) преобразуется в неравенство

$$\varphi(u+v) \leq \varphi(u) + e^{\rho u}\varphi(v)\,. \tag{20}$$

Используя метод математической индукции, получаем

$$\frac{\rho\varphi(nu)}{e^{\rho nu}-1} \leq \frac{\rho\varphi(u)}{e^{\rho u}-1}\,, \tag{21}$$

$$\varphi(nu+mv) \leq \frac{e^{\rho nu}-1}{e^{\rho u}-1}\varphi(u) + e^{\rho nu}\frac{e^{\rho mv}-1}{e^{\rho v}-1}\varphi(v), \quad \rho \neq 0\,, \tag{22}$$

$$\varphi(nu+mv) \leq n\varphi(u) + m\varphi(v), \quad \rho = 0\,. \tag{23}$$

Пусть выполняется условие а) теоремы. Так как при замене $t = \ln(1+\alpha)$ измеримость сохраняется и множество положительной меры переходит в множество положительной меры, то при принятом предположении функция φ

будет измеримой и конечной на некотором множестве E положительной меры. Обозначим $E_n = \{t \in E : \varphi(t) \le n\}$. Тогда E_n — возрастающая последовательность измеримых множеств, причем $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Для некоторого n множество E_n имеет положительную меру. На множестве E_n функция φ ограничена сверху. Заметим, что условие б) прямо гарантирует существование такого множества. Вдобавок, без ограничения общности, можем считать, что множество E_n ограничено. Теперь из (20) следует, что функция φ ограничена сверху на множестве $E_n + E_n$. По теореме 3 это множество содержит некоторый сегмент $[\tau_1, \tau_2] \subset (0, \infty)$. Таким образом, как из условия а), так и из условия б), вытекает существование сегмента $[\tau_1, \tau_2] \subset (0, \infty)$, на котором функция φ ограничена сверху. Пусть

$$H = \inf_{t>0} \frac{\rho\varphi(t)}{e^{\rho t} - 1}.$$

По условию теоремы $H < \infty$. Пусть H_1 — произвольное вещественное число, строго большее, чем H. Тогда существует число $\alpha_0 > 0$, такое что

$$\frac{\rho\varphi(\alpha_0)}{e^{\rho\alpha_0} - 1} < H_1.$$

Пусть вначале $\rho < 0$. Применим лемму 2 с $s = \alpha_0$ и сегментом $[\tau_1, \tau_2]$. Тогда для любого достаточно большого x справедливо представление $x = n(x)\tau + m(x)\alpha_0$. Положим в неравенстве (22) $n = m(x)$, $u = \alpha_0$, $m = n(x)$, $v = \tau$. Получим

$$\frac{\rho\varphi(x)}{e^{\rho x} - 1} \le \frac{e^{\rho m(x)\alpha_0} - 1}{e^{\rho x} - 1} \frac{\rho\varphi(\alpha_0)}{e^{\rho\alpha_0} - 1} + e^{\rho m(x)\alpha_0} \frac{e^{\rho n(x)\tau} - 1}{e^{\rho x} - 1} \frac{\rho\varphi(\tau)}{e^{\rho\tau} - 1}.$$

Так как $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$, то функция $\varphi(\tau) = \varphi(\tau(x))$ является ограниченной сверху. Переходя в полученном неравенстве к пределу при $x \to \infty$, находим, что

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\rho\varphi(x)}{e^{\rho x} - 1} \le \frac{\rho\varphi(\alpha_0)}{e^{\rho\alpha_0} - 1} < H_1.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\rho\varphi(x)}{e^{\rho x} - 1} \le H.$$

Используя определение H, легко получить, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\rho\varphi(x)}{e^{\rho x} - 1} = H. \tag{24}$$

Таким образом, утверждение 1 теоремы при $\rho < 0$ доказано.

Пусть теперь $\rho > 0$. Применим неравенство (22) с $n = n(x)$, $u = \tau$, $m = m(x)$, $v = \alpha_0$. Получим

$$\frac{\rho\varphi(x)}{e^{\rho x}-1} \le \frac{e^{\rho n(x)\tau}-1}{e^{\rho x}-1}\frac{\rho\varphi(\tau)}{e^{\rho\tau}-1} + \frac{e^{\rho x}-e^{\rho n(x)\tau}}{e^{\rho x}-1}\frac{\rho\varphi(\alpha_0)}{e^{\rho\alpha_0}-1}\,.$$

Так как $\rho x - \rho n(x)\tau = \rho m(x)\alpha_0$, и так как по замечанию к лемме 2 можно считать, что $\lim\limits_{x\to\infty} m(x) = \infty$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\rho n(x)\tau}-1}{e^{\rho x}-1} = 0\,.$$

Мы вновь получаем, что

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\,\frac{\rho\varphi(x)}{e^{\rho x}-1} \le H\,.$$

Из этого неравенства следует (24) уже при $\rho > 0$. Пусть теперь $\rho = 0$. Подставляя в неравенство (23) $n = n(x)$, $u = \tau$, $m = m(x)$, $v = \alpha_0$, получим

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{x} &\le \frac{n(x)}{x}\varphi(\tau) + \frac{m(x)}{x}\varphi(\alpha_0)\\ &= \frac{n(x)}{x}\left(\varphi(\tau) - \frac{\tau}{\alpha_0}\varphi(\alpha_0)\right) + \frac{\varphi(\alpha_0)}{\alpha_0}\,. \end{aligned}\qquad (25)$$

Мы можем считать, согласно замечания к лемме 2, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n(x)}{m(x)} = 0$. Тогда из (25) следует, что

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\,\frac{\varphi(x)}{x} \le \frac{\varphi(\alpha_0)}{\alpha_0} < H_1\,.$$

Отсюда следует (24) и при $\rho = 0$. Утверждение 1 теоремы доказано.

Далее будем доказывать утверждение 2. Обозначим

$$N_1 = \underline{\lim_{\alpha\to+0}}\,\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}\,.$$

Пусть τ_k, $\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k = 0$, такая последовательность, что

$$N_1 = \lim_{k\to\infty}\frac{\varphi(\tau_k)}{\tau_k}\,.$$

Обозначим $t_{n,k} = n\tau_k$. Тогда из неравенства (21) следует, что

$$\frac{\rho\varphi(t_{n,k})}{e^{\rho t_{n,k}}-1} \le \frac{\rho\varphi(\tau_k)}{e^{\rho\tau_k}-1}\,. \qquad (26)$$

Пусть t — произвольное строго положительное число. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = 0$, то существует функция $n = n(k)$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} t_{n(k),k} = t$. Причем функцию $n = n(k)$ можем выбирать таким образом, чтобы гарантировать выполнение любого из неравенств $t_{n(k),k} < t$, $t_{n(k),k} > t$. Выберем $n = n(k)$ одним из указанных способов и подставим в (26) $n(k)$ вместо n. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\frac{\rho}{e^{\rho t} - 1} \overline{\lim_{k\to\infty}} \varphi(t_{n(k),k}) \leq N_1 \,. \tag{27}$$

Если теперь $n(k)$ выбрано так, что выполняется неравенство $t_{n(k),k} > t$, то из (27) следует, что

$$\frac{\rho}{e^{\rho t} - 1} \underline{\lim_{u\to t+0}} \varphi(u) \leq \frac{\rho}{e^{\rho t} - 1} \overline{\lim_{k\to\infty}} \varphi(t_{n(k),k}) \leq N_1 \,. \tag{28}$$

Аналогично получаем

$$\frac{\rho}{e^{\rho t} - 1} \underline{\lim_{u\to t-0}} \varphi(u) \leq N_1 \,.$$

Из этого следует утверждение 2 теоремы. Осталось доказать утверждение 3 теоремы. Предыдущие рассуждения показывают, что достаточно установить аналогичный результат для функции φ. Пусть φ полунепрерывна снизу справа в точке t. Это означает, что выполняется неравенство

$$\varphi(t) \leq \underline{\lim_{u\to t+0}} \varphi(u) \,.$$

Теперь из (28) следует, что

$$\frac{\rho\varphi(t)}{e^{\rho t} - 1} \leq N_1 \,. \tag{29}$$

Аналогично доказывается неравенство (29) и в случае, если φ полунепрерывна снизу слева в точке t. Из неравенства (29) легко следует утверждение 3 теоремы. Кроме того, отметим, что измеримость $N(\alpha)$ не гарантирует справедливость утверждения пункта 3 теоремы. Теорема полностью доказана.

В теоремах 6 (п. 3) и 7 приведены достаточные условия существования предела

$$\lim_{\alpha\to+0} \frac{N(\alpha)}{\alpha} \tag{30}$$

для ρ-полуаддитивных функций, которые выражены в терминах свойств функции $N(\alpha)$. Можно привести условия существования предела и в других терминах. Обозначим

$$N_1 = \underline{\lim_{\alpha\to+0}} \frac{N(\alpha)}{\alpha} \,. \tag{31}$$

Тогда существует множество $E \subset (0, \infty)$, для которого нуль является предельной точкой, и такое, что

$$\lim_{\substack{\alpha \to +0 \\ \alpha \in E}} \frac{N(\alpha)}{\alpha} = N_1 \,. \tag{32}$$

Если существует предел (30), то тогда в качестве E можно взять всю полуось $(0, \infty)$. Покажем, что если в равенстве (32) множество E достаточно "массивное", то существует предел (30). Нам нужно несколько новых определений. Частично используем терминологию из [4]. Множество E в абелевой полугруппе называется модулем, если из соотношений $x \in E$, $y \in E$ следует, что $x + y \in E$. Всюду в дальнейшем в качестве абелевой полугруппы будет выступать вещественная полуось $(0, \infty)$ со сложением в качестве полугрупповой операции. Множество $E \subset (0, \infty)$ называется L-модулем, если из соотношений $x \in E$, $y \in E$ следует, что $x + y + xy \in E$. Легко видеть, что если E – модуль, $\alpha(t) = e^t - 1$, то $\alpha(E)$ есть L-модуль и, обратно, если E – L-модуль и $t(\alpha) = \ln(1 + \alpha)$, то $t(E)$ есть модуль. Пусть E – произвольное множество на полуоси $(0, \infty)$. Через $S(E)$ будем обозначать наименьший модуль, содержащий множество E. Легко видеть, что $x \in S(E)$ тогда и только тогда, когда $x = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, где $u_k \in E$. Число n и слагаемые u_k изменяются с изменением x. Аналогично, через $\hat{S}(E)$ обозначается наименьший L-модуль, содержащий E.

Теорема 8. *Пусть функция $\varphi(t)$, $t \in (0, \infty)$, удовлетворяет неравенству* (20),

$$N_1 = \varliminf_{t \to +0} \frac{\varphi(t)}{t} \,.$$

Пусть $E \subset (0, \infty)$ есть множество, для которого нуль является предельной точкой, причем

$$\lim_{\substack{t \to +0 \\ t \in E}} \frac{\varphi(t)}{t} = N_1 \,.$$

Тогда

$$\lim_{\substack{t \to +0 \\ t \in S(E)}} \frac{\varphi(t)}{t} = N_1 \,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon > 0$, $\delta_0 \in (0, 1)$ суть произвольные числа. По условию теоремы существует $\delta \in (0, \delta_0)$ такое, что для любого $t \in (0, \delta) \bigcap E$, будет выполняться неравенство

$$\left| \frac{\varphi(t)}{t} - N_1 \right| < \varepsilon \,,$$

и, в частности, неравенство $\varphi(t) < (N_1 + \varepsilon)t$. Пусть теперь $t \in (0, \delta) \bigcap S(E)$. Тогда $t = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, где $u_k \in E$. Очевидно также, что $u_k \in (0, \delta)$. Поэтому $\varphi(u_k) < (N_1 + \varepsilon)u_k$. Тогда, используя неравенство (20), получим

$$\begin{gathered}
\varphi(t) = \varphi(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) \le \varphi(u_1) + e^{\rho u_1}\varphi(u_2) \\
+ \ldots + e^{\rho(u_1+u_2+\ldots+u_{n-1})}\varphi(u_n) < (N_1+\varepsilon)(u_1 + e^{\rho u_1}u_2 \\
+ \ldots + e^{\rho(u_1+u_2+\ldots+u_{n-1})}u_n)\,, \qquad (33) \\
\varphi(t) < (N_1+\varepsilon)(1 + \operatorname{sign}(N_1+\varepsilon)\sup_{x\in[0,\delta]}|e^{\rho x} - 1|)t\,.
\end{gathered}$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\lim_{\substack{t\to+0\\ t\in S(E)}}}\frac{\varphi(t)}{t} \le N_1\,.$$

Из этого следует утверждение теоремы в случае $N_1 \in (-\infty, \infty)$. Случай $N_1 = -\infty$ исследуется аналогично. В случае $N_1 = +\infty$ теорема тривиальна. Теорема доказана.

Теорема 9. *Пусть функция $\varphi(t)$, $t \in (0,\infty)$, удовлетворяет неравенству (20) и*

$$\underline{\lim_{t\to+0}}\frac{\varphi(t)}{t} = N_1\,.$$

Пусть $E \subset (0,\infty)$ — множество, для которого 0 является предельной точкой, и такое, что

$$\lim_{\substack{t\to+0\\ t\in E}}\frac{\varphi(t)}{t} = N_1\,.$$

Тогда, если для любого $\delta > 0$ множество $(0,\delta)\bigcap S(E)$ содержит в себе множество положительной меры, то существует $\lim\limits_{t\to+0}\frac{\varphi(t)}{t}$.

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что для любого $\delta > 0$ множество $(0,\delta)\bigcap S(E)$ содержит в себе интервал. Поэтому существует открытое множество E_1, для которого нуль является предельной точкой, такое, что $E_1 \subset S(E)$. Тогда $S(E_1) \subset S(S(E)) = S(E)$. По теореме 8.6.1 из [4] $S(E_1) = (0,\infty)$. Таким образом, $S(E) = (0,\infty)$. Теперь применение теоремы 8 заканчивает доказательство теоремы.

Сформулируем теперь соответствующие результаты для ρ-полуаддитивных функций.

Теорема 10. *Пусть $N(\alpha)$, $\alpha \in (0,\infty)$, есть ρ-полуаддитивная функция и*

$$N_1 = \varliminf_{\alpha\to+0} \frac{N(\alpha)}{\alpha}.$$

Пусть $E \subset (0,\infty)$ — множество, для которого 0 есть предельная точка, и такое, что

$$\lim_{\substack{\alpha\to+0\\ \alpha\in E}} \frac{N(\alpha)}{\alpha} = N_1.$$

Тогда

$$\lim_{\substack{\alpha\to+0\\ \alpha\in\hat{S}(E)}} \frac{N(\alpha)}{\alpha} = N_1.$$

Теорема 11. *Пусть $N(\alpha)$, $\alpha \in (0,\infty)$, есть полуаддитивная функция и*

$$N_1 = \varliminf_{\alpha\to+0} \frac{N(\alpha)}{\alpha}.$$

Пусть $E \subset (0,\infty)$ есть множество, для которого 0 есть предельная точка, и такое, что

$$\lim_{\substack{\alpha\to+0\\ \alpha\in E}} \frac{N(\alpha)}{\alpha} = N_1.$$

Тогда, если для любого $\delta > 0$ множество $(0,\delta)\bigcap\hat{S}(E)$ содержит внутри себя множество положительной меры, то существует предел $\lim\limits_{\alpha\to+0} \frac{N(\alpha)}{\alpha}$.

4. Свойства функций плотности

Пусть $\rho(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho \in (-\infty,\infty)$, есть произвольный уточненный порядок, $V(r) = r^{\rho(r)}$. Как показывает опыт исследований по теории роста функций, наряду с функцией $V(r)$ часто приходится рассматривать функцию

$$V_1(r) = \int_1^r \frac{V(t)}{t}\,dt.$$

Если $\lim\limits_{r\to\infty} V(r) = \lim\limits_{r\to\infty} V_1(r) = \infty$, то из правила Лопиталя следует, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V(r)}{V_1(r)} = \rho.$$

В случае $\rho > 0$ функции $V(r)$ и $V_1(r)$ имеют одинаковый рост. В случае $\rho = 0$ функция $V_1(r)$ растет быстрее. Если функция $V_1(r)$ ограничена, то удобно рассматривать функцию

$$V_2(r) = \int\limits_r^\infty \frac{V(t)}{t}\, dt\,.$$

Если $\lim\limits_{r\to\infty} V(r) = 0$ и функция $V_1(r)$ ограничена, то $\lim\limits_{r\to\infty} V_2(r) = 0$. В этом случае правило Лопиталя дает

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V(r)}{V_2(r)} = -\rho\,.$$

Ниже будет видно, как появляются в теории роста функции $V_1(r)$ и $V_2(r)$. Для произвольной функции $f(r)$, определенной на полуоси $(0,\infty)$, можно ввести тип и нижний тип, которые в этом разделе обозначаются B и A:

$$B = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{f(r)}{V(r)}, \quad A = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{f(r)}{V(r)}\,.$$

По формулам (3) и (4) определяем плотность и нижнюю плотность функции $f(r)$. Мы намерены изучить связи между этими величинами и получить оценки для функции $f(r)$. Простые априорные ограничения на функцию $f(r)$, такие как измеримость или ограниченность на конечных сегментах, дают важную информацию о поведении введенных величин.

Теорема 12. *Пусть существует число r_0 такое, что функция $f(r)$ ограничена сверху на любом сегменте $[a,b]$, $a \geq r_0$, и пусть $\lim\limits_{r\to\infty} V_1(r) = \infty$. Тогда*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{f(r)}{V_1(r)} \leq \inf_{\alpha>0} \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1}\,.$$

(*Напомним, что* $\left.\frac{\rho}{(1+\alpha)^\rho - 1}\right|_{\rho=0} = \frac{1}{\ln(1+\alpha)}$.)

З а м е ч а н и е. Некоторые близкие результаты содержатся в лемме 1.12 (Прил. 2) из [3].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $N(\alpha) \equiv \infty$ при $\alpha > 0$, то и доказывать нечего. Поэтому можно считать, что для некоторых $\alpha > 0$ $N(\alpha) < \infty$. В дальнейшем зафиксируем одно такое α. Пусть ε — произвольное строго положительное число, и пусть $R \geq r_0$ такое число, что

$$\frac{f(r+\alpha r) - f(r)}{V(r)} \leq N(\alpha) + \varepsilon$$

при $r \geq R$. (Выражение $N(\alpha)+\varepsilon$ нужно заменить на произвольное вещественное число, если $N(\alpha) = -\infty$.) Пусть теперь $r \geq R$, а число n определяется из условия $R(1+\alpha)^n \leq r < R(1+\alpha)^{n+1}$. Тогда $\overline{r} = (1+\alpha)^{-n} r \in [R, (1+\alpha)R)$. В дальнейшем $1+\alpha$ будем обозначать через q. Пусть $M = \sup\{f(t) : t \in [R, qR)\}$. По условию теоремы $M < +\infty$. Далее имеем

$$f(r) = f(\overline{r}) + \sum_{k=1}^{n} (f(q^k \overline{r}) - f(q^{k-1}\overline{r}))$$

$$\leq M + (N(\alpha)+\varepsilon) \sum_{k=1}^{n} V(q^{k-1}\overline{r}) \,. \tag{34}$$

Пусть $L(x) = x^{-\rho} V(x)$. Как известно (см. [1]), функция $\frac{L(xt)}{L(x)}$ равномерно относительно $t \in [1, q]$ стремится к 1 при $x \to \infty$. Поэтому

$$\int_{q^{k-1}\overline{r}}^{q^k \overline{r}} \frac{V(x)}{x}\, dx = \int_{q^{k-1}\overline{r}}^{q^k \overline{r}} \frac{L(x)}{x^{1-\rho}}\, dx$$

$$= \frac{L(q^{k-1}\overline{r})}{1+\varepsilon_k} \int_{q^{k-1}\overline{r}}^{q^k \overline{r}} x^{\rho-1}\, dx = \frac{V(q^{k-1}\overline{r})}{1+\varepsilon_k} \frac{q^\rho - 1}{\rho} \,, \tag{35}$$

где $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$. Теперь из условия $\lim\limits_{k\to\infty} V_1(r) = \infty$, неравенства (34) и равенства (35) следует, что

$$f(r) \leq M + (1+\varepsilon(r)) \frac{\rho(N(\alpha)+\varepsilon)}{(1+\alpha)^\rho - 1} V_1(r) \,,$$

где $\lim\limits_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0$. Тем самым теорема доказана.

Случай, когда функция $V_1(r)$ ограничена, исследуется в следующей теореме.

Теорема 13. *Пусть* $\lim\limits_{r\to\infty} V(r) = 0$, $V_1(r) \leq M$ *и* $\lim\limits_{r\to\infty} f(r) = 0$. *Тогда*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{f(r)}{V_2(r)} \leq \inf_{\alpha>0} \frac{-\rho \underline{N}(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1} \,.$$

Доказательство. Из условия $\lim\limits_{r\to\infty} f(r) = 0$ следует, что

$$f(r) = -\sum_{k=1}^{\infty} (f(q^k r) - f(q^{k-1} r)), \quad q > 1 \,.$$

Если $\underline{N}(\alpha) = -\infty$ при любом $\alpha > 0$, то и доказывать нечего. Поэтому можно считать, что для некоторых $\alpha > 0$ справедливо неравенство $\underline{N}(\alpha) > -\infty$. Зафиксируем одно из таких α и обозначим $q = 1+\alpha$. Пусть ε — произвольное строго положительное число. Существует такое R, что при $r \geq R$ будет выполняться неравенство

$$f(q^k r) - f(q^{k-1}r) \geq (\underline{N}(\alpha) - \varepsilon)V(q^{k-1}r)\,.$$

(Если $\underline{N}(\alpha) = \infty$, то выражение $\underline{N}(\alpha) - \varepsilon$ нужно заменить на произвольное вещественное число.) Из этого неравенства и равенства (35) следует, что

$$f(r) \leq -(\underline{N}(\alpha) - \varepsilon)\frac{\rho}{q^\rho - 1}\sum_{k=1}^{\infty}(1+\varepsilon_k(r))\int\limits_{q^{k-1}r}^{q^k r}\frac{V(x)}{x}\,dx$$

$$= -(\underline{N}(\alpha) - \varepsilon)\frac{\rho}{q^\rho - 1}(1+\varepsilon(r))V_2(r)\,,$$

где функции $\varepsilon_k(r)$ равномерно относительно k стремятся к нулю при $r \to \infty$ и функция $\varepsilon(r)$ также сходится к нулю при $r \to \infty$. Из полученного неравенства следует утверждение теоремы.

Результаты для случая $\rho \neq 0$ сформулируем в виде отдельной теоремы.

Теорема 14. *Пусть $\rho > 0$ и пусть существует такое число r_0, что функция $f(r)$ ограничена сверху на любом сегменте $[a, b]$, $a \geq r_0$. Тогда*

$$B\rho \leq \inf_{\alpha>0}\frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1}\,. \tag{36}$$

Если функция $-f$ ограничена сверху на указанных выше сегментах, то

$$\sup_{\alpha>0}\frac{\rho \underline{N}(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1} \leq A\rho\,. \tag{37}$$

Пусть $\rho < 0$ и $\lim\limits_{r\to\infty} f(r) = 0$. Тогда

$$A\rho \leq \inf_{\alpha>0}\frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1}\,, \tag{38}$$

$$\sup_{\alpha>0}\frac{\rho \underline{N}(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1} \leq B\rho\,. \tag{39}$$

Если дополнительно предположить, что $A > -\infty$, то неравенства (36), (39) *превращаются в равенства. А если предположить, что $B < +\infty$, то неравенства* (37), (38) *превращаются в равенства.*

З а м е ч а н и е. Если функция f удовлетворяет условиям теоремы 14, а именно: $f(r)$ ограничена на достаточно удаленных от нуля сегментах, если $\rho > 0$, и $\lim\limits_{r\to\infty} f(r) = 0$, если $\rho < 0$, и если, кроме того, $N(\alpha) \neq +\infty$, $\underline{N}(\alpha) \neq -\infty$ при некотором α, то величины A и B конечны и все неравенства теоремы 14. превращаются в равенства.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение теоремы следует из теоремы 12. Второе утверждение теоремы — это первое утверждение, примененное к функции $-f$. Четвертое утверждение теоремы следует из теоремы 13. Третье утверждение теоремы есть четвертое утверждение, примененное к функции $-f$. Далее исследуем случаи равенства. Остановимся на неравенстве (36). Пусть $A > -\infty$. Если $A = +\infty$, то очевидно, что неравенство (36) превращается в равенство $+\infty = +\infty$. Поэтому можно считать, что $A \in (-\infty, \infty)$. Далее имеем

$$\begin{aligned} B\rho &= \rho \varlimsup_{r\to\infty} \frac{f(r+\alpha r)}{V(r+\alpha r)} \geq \rho \varlimsup_{r\to\infty} \frac{f(r+\alpha r) - f(r)}{V(r+\alpha r)} \\ &+ \rho \varliminf_{r\to\infty} \frac{f(r)}{V(r+\alpha r)} = \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho} + \frac{\rho A}{(1+\alpha)^\rho}. \end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\alpha \to \infty$ и используя теорему 6., получим

$$B\rho \geq \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho} = \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1} = \inf_{\alpha>0} \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1}.$$

Это неравенство говорит о том, что в рассматриваемом случае неравенство (36) есть равенство. Применяя это рассуждение к функции $-f$, получим что из условия $B < +\infty$ следует, что неравенство (37) есть равенство. Оставшиеся случаи исследуются аналогично.

Рассмотрим теперь частный случай, когда выполняется равенство $N(\alpha) = \underline{N}(\alpha)$.

Теорема 15. *Пусть $f(r)$ — функция, определенная на луче $[0, \infty)$, и пусть существует число r_0 такое, что функция ограничена на каждом сегменте $[a, b]$, $a \geq r_0$. Пусть $\rho(r)$ такой уточненный порядок, что $\lim\limits_{r\to\infty} V_1(r) = \infty$. Пусть $N(\alpha) = \underline{N}(\alpha)$ и функция $N(\alpha)$ конечна при некотором $\alpha > 0$. Тогда*

$$N(\alpha) = N\frac{(1+\alpha)^\rho - 1}{\rho}, \tag{40}$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f(r)}{V(r)} = \rho N, \quad \rho \neq 0,$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f(r)}{V_1(r)} = N, \quad \rho = 0\,.$$

З а м е ч а н и е. Равенство $N(\alpha) = \underline{N}(\alpha)$ гарантирует для $N(\alpha)$ выполнение равенства (16). В теореме 4 переход от равенства (16) к равенству (40) осуществляется при гораздо более жестких ограничениях на функцию $N(\alpha)$. В теореме 15. требуется только конечность $N(\alpha)$ хотя бы в одной точке. Это происходит потому, что в теореме 15. $N(\alpha)$ — не произвольная ρ-аддитивная функция, а функция плотности специальной функции f.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 12, примененной к функциям f и $-f$ следует, что каждая из величин

$$\underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{f(r)}{V_1(r)}, \quad \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{f(r)}{V_1(r)}$$

конечна. Из этой же теоремы следует, что величина $N(\alpha)$ ограничена на любом сегменте $[a,b]$, $a>0$. Теперь из теоремы 4 следует, что выполняется равенство (40) со стандартной оговоркой для $\rho = 0$. Далее из теоремы 12, примененной к функциям f и $-f$, следуют остальные утверждения теоремы.

Заключение теоремы 15 справедливо и при других ограничениях на функции $f(r)$ и $N(\alpha)$.

Теорема 16. *Пусть $\rho(r)$ — такой уточненный порядок, что $\lim_{r\to\infty} V_1(r) = \infty$. Пусть $f(r)$, $r\in[0,\infty)$ есть конечная измеримая функция с равными функциями плотности $N(\alpha)=\underline{N}(\alpha)$. Если функция $N(\alpha)$ конечна на множестве положительной меры, то*

$$N(\alpha) = N\frac{(1+\alpha)^\rho - 1}{\rho}\,, \tag{41}$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f(r)}{V(r)} = \rho N, \quad \rho > 0\,,$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f(r)}{V_1(r)} = N, \quad \rho = 0\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $N(\alpha)=\underline{N}(\alpha)$, то справедливо равенство (16). Также имеем

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f(r+\alpha r) - f(r)}{V(r)} = N(\alpha)\,. \tag{42}$$

Поскольку предел измеримых функций есть измеримая функция, то $N(\alpha)$ — измеримая функция. Теперь из теоремы 4 следует равенство (41). Пусть

$[a,b] \subset [0,\infty)$. Из теоремы 2 следует, что соотношение (42) выполняется равномерно относительно $\alpha \in [a,b]$. Из этого следует ограниченность функции f на сегментах, достаточно удаленных от нуля. Теперь теорема 16 следует из теоремы 15.

Рассмотрим еще случай, когда функция $V_1(r)$ является ограниченной.

Теорема 17. *Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок, причем функция $V_1(r)$ является ограниченной. Пусть $f(r)$, $r \in [0,\infty)$, есть бесконечно малая функция при $r \to \infty$. Пусть функции плотности функции f относительно $V(r)$ совпадают, $N(\alpha) = \underline{N}(\alpha)$, и функция $N(\alpha)$ конечна при некотором $\alpha > 0$. Тогда*

$$N(\alpha) = N\frac{(1+\alpha)^\rho - 1}{\rho}\,,$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{f(r)}{V_2(r)} = -N\,,$$

где функция $V_2(r)$ определена ранее.

Доказательство. Теорема 17 доказывается так же, как и теорема 15, только ссылку на теорему 12 нужно заменить ссылкой на теорему 13.

Теорема 18. *Пусть функции $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$, $\alpha \in (0,\infty)$, удовлетворяют неравенствам (5)–(8) и неравенству $\underline{N}(\alpha) \le N(\alpha)$. Пусть величины N и $\underline{N}$ существуют (существуют соответствующие пределы), причем $N = \underline{N}$. Пусть хотя бы одна из функций $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ не есть тождественная плюс или минус бесконечность. Тогда N — конечная величина и*

$$N(\alpha) = \underline{N}(\alpha) = N\frac{(1+\alpha)^\rho - 1}{\rho}\,.$$

Доказательство. Предположим вначале, что $N = \underline{N} = -\infty$. Тогда $\overline{\lim\limits_{\alpha\to+0}} N(\alpha) \le 0$. В силу теоремы 7 справедливо равенство

$$N = \sup_{\alpha>0}\frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1}\,. \tag{43}$$

Откуда следует, что $\underline{N}(\alpha) = N(\alpha) = -\infty$. Если $N = \underline{N} = +\infty$, то, заменяя в предыдущем рассуждении функцию $N(\alpha)$ на функцию $-\underline{N}(\alpha)$, получим, что $N(\alpha) = \underline{N}(\alpha) = \infty$. Таким образом, из условий теоремы следует, что N есть вещественное число, а не символ $\pm\infty$. Теперь из равенства (43) и аналогичного равенства для функции $-\underline{N}(\alpha)$ следует, что

$$N(\alpha) = \underline{N}(\alpha) = N\frac{(1+\alpha)^\rho - 1}{\rho}\,.$$

Теорема доказана.

Мы приведем еще некоторые условия, обеспечивающие равенство $N(\alpha) = \underline{N}(\alpha)$.

Теорема 19. *Пусть функции* $N(\alpha)$ *и* $\underline{N}(\alpha)$, $\underline{N}(\alpha) \le N(\alpha)$, *удовлетворяют неравенствам* (5)–(8) *и каждая из функций* $N(\alpha)$, $-\underline{N}(\alpha)$, *удовлетворяет условиям пункта* 1 *теоремы* 6. *Пусть, кроме того,*

$$\varliminf_{\alpha\to+0} \frac{N(\alpha) - \underline{N}(\alpha)}{\alpha} = 0 \,. \tag{44}$$

Тогда выполняются равенства

$$H := \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1} = \inf_{\alpha>0} \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1} \,,$$

$$H = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\rho \underline{N}(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1} = \sup_{\alpha>0} \frac{\rho \underline{N}(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1} \,.$$

Если дополнительно известно, что $\rho > 0$, *а* $N(\alpha)$ *и* $\underline{N}(\alpha)$ *есть функции плотности функции* $f(r)$ *относительно уточненного порядка* $\rho(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho$, *причем функция* f *является ограниченной на всех сегментах достаточно удаленных от нуля, или что* $\rho < 0$, *а* $N(\alpha)$ *и* $\underline{N}(\alpha)$ *функции плотности функции* $f(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty} f(r) = 0$, *то*

$$\underline{N}(\alpha) = N(\alpha) = H \frac{(1+\alpha)^\rho - 1}{\rho} \,.$$

Доказательство. Согласно теореме 6, существуют пределы

$$H = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1} = \inf_{\alpha>0} \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1} \,,$$

$$\underline{H} = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\rho \underline{N}(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1} = \sup_{\alpha>0} \frac{\rho \underline{N}(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1} \,.$$

Так как $\underline{N}(\alpha) \le N(\alpha)$, то $\underline{H} \le H$. Имеем

$$N(\alpha) \ge H \frac{(1+\alpha)^\rho - 1}{\rho} \,,$$

$$\underline{N}(\alpha) \le \underline{H} \frac{(1+\alpha)^\rho - 1}{\rho} \,,$$

$$N(\alpha) - \underline{N}(\alpha) \geq (H - \underline{H})\frac{(1+\alpha)^\rho - 1}{\rho}.$$

Теперь из (44) следует, что $0 \geq H - \underline{H}$, $\underline{H} \geq H$, $\underline{H} = H$.

Пусть теперь выполняются дополнительные условия теоремы. Тогда из полученных оценок и теоремы 14 следует, что существует $\lim\limits_{r\to\infty}(f(r)/V(r))$, и значит, $\underline{N}(\alpha) = N(\alpha)$. Из этого легко следует утверждение теоремы.

Теорема 20. *Пусть конечные функции $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ удовлетворяют неравенствам* (5)–(8), *и пусть*

$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{N(\alpha)-\underline{N}(\alpha)}{\alpha} = 0.$$

Тогда $N(\alpha) = \underline{N}(\alpha)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $N_1(\alpha) = N(\alpha) - \underline{N}(\alpha)$. Тогда функция $N_1(\alpha)$ удовлетворяет неравенству (5), неотрицательна и, кроме того, $\lim\limits_{\alpha\to+0}\frac{N_1(\alpha)}{\alpha} = 0$. По теореме 6 $N_1(\alpha) \leq 0$. Поэтому $N_1(\alpha) = 0$. Теорема доказана.

5. Примеры функций $f(r)$ и их функций плотности

В заключение статьи приведем несколько примеров на вычисление функций плотности. Пусть $u(r)$ — периодическая непрерывная функция.

1. В качестве первого примера рассмотрим функцию $f(r) = r^\rho u(\ln\ln r)$. Для этой функции

$$B = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{f(r)}{r^\rho} = \max_x u(x), \quad A = \underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{f(r)}{r^\rho} = \min_x u(x),$$

$$N(\alpha) = B((1+\alpha)^\rho - 1), \quad \underline{N}(\alpha) = A((1+\alpha)^\rho - 1).$$

2. Пусть $f(r) = r^\rho u(\ln^\sigma r)$, $\sigma \in (0,1)$. Для этой функции величины B, A, $N(\alpha)$, $\underline{N}(\alpha)$ такие же, как и в первом примере.

3. Пусть $f(r) = r^\rho u(\ln r)$. Тогда

$$N(\alpha) = \max_x((1+\alpha)^\rho u(x+\ln(1+\alpha)) - u(x)),$$

$$\underline{N}(\alpha) = \min_x((1+\alpha)^\rho u(x+\ln(1+\alpha)) - u(x)).$$

4. Пусть функция $f(r)$ такая, как в примере 3, и пусть функция $u(x)$ непрерывно дифференцируема. Тогда

$$N = \lim_{\alpha\to+0}\frac{N(\alpha)}{\alpha} = \max_x(\rho u(x) + u'(x)),$$

$$\underline{N} = \lim_{\alpha \to +0} \frac{\underline{N}(\alpha)}{\alpha} = \min_x (\rho u(x) + u'(x)) \, .$$

5. Пусть функция $f(r)$ такая, как в примере 3. Однако относительно u предположим, что существует точка x_0 такая, что $u(x_0+\Delta x) - u(x_0) \geq \beta \Delta x^\sigma$ при $\Delta x \in (0, \delta)$, где β — некоторое положительное число, $\sigma \in (0,1)$. Тогда

$$N(\alpha) \geq \beta(1+\alpha)^\rho \ln^\sigma(1+\alpha) + u(x_0)((1+\alpha)^\rho - 1) \, ,$$

если $\ln(1+\alpha) \in (0, \delta)$.

6. Пусть $f(r) = r^\rho u(\ln^\sigma r)$, $\sigma > 1$. Тогда

$$N(\alpha) = \max_{x,y}((1+\alpha)^\rho u(x) - u(y)) \, ,$$

$$\underline{N}(\alpha) = \min_{x,y}((1+\alpha)^\rho u(x) - u(y)) \, .$$

Список литературы

[1] *Б.Я. Левин,* Распределение корней целых функций. Гостехиздат, Москва (1956).

[2] *А.Ф. Гришин, Т.И. Малютина,* Об уточненном порядке. — Комплексный анализ и мат. физика: Межвуз. сб., Красноярск (1998), с. 10–24.

[3] *E. Seneta,* Regularly varying functions. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1976) (Русск. пер. — Наука, ГРФМЛ, Москва (1985)).

[4] *E. Hille, R.S. Phillips,* Functional analysis and semi-groups. Amer. Math. Sos., Providence, RI (1957) (Русск. пер. — Изд-во иностр. лит., Москва (1962)).

[5] *W. Hengartner and R. Theodorescu,* Concentration functions. Acad. Press, New York, London (1973) (Русск. пер. — Наука, ГРФМЛ, Москва (1980)).

[6] *H. Korevaar, T. van Aardenne-Ehrenfest, and N.G. de Breijn,* A note on slowly oscillating functions. — Niew. Arch. Wisk. (1949), v. 23, p. 77–86.

[7] *H. Steinhaus,* Sur les distances des points de mesure positive. — Fund. Math. (1920), v. 1, p. 93–104.

[8] *G. Polya,* Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreichen. — Math. Z. (1929), Bd. 29, S. 549–640.

[9] *А.А. Кондратюк,* Целые функции с положительными нулями, имеющие конечную максимальную плотность. — Теория функций, функц. анализ и их прил. (1968), вып. 7, с. 37–52.

Density functions

A.F. Grishin, T.I. Malyutina

We study properties of ρ-semiadditive functions, $N(\alpha+\beta) \le N(\alpha) + (1+\alpha)^\rho N\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right)$. Their theory is similiar to the very investigated one of semiadditive functions. The functions of density $N(\alpha)=\limsup r^{-\rho}(f(r+\alpha r)-f(r))$ $(r \to \infty)$ are ρ-semiadditive. One of results of the note is an extension of the theorem of Polya (1929) on existence of maximal and minimal densities. We are interested in the question of uniformity in the above limiting relation.

Функції щільності

А.Ф. Гришин, Т.І. Малютіна

Вивчаються властивості ρ-півадитивних функцій, $N(\alpha+\beta) \le N(\alpha) + (1+\alpha)^\rho N\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right)$. Теорія ρ-півадитивних функцій паралельна добре розробленій теорії півадитивних функцій. До класу ρ-півадитивних функцій належить функція щільності $N(\alpha)=\limsup r^{-\rho}(f(r+\alpha r)-f(r))$ $(r \to \infty)$. Один із результатів цієї роботи — поширення теореми Поліа (1929) про існування мінімальної та максимальної щільностей на більш широкий клас функцій. Авторів цікавлять також питання рівномірності у представленому вище граничному співвідношенні.